الإسم و الرقم الجامعي:

امتحان مادة الميكانيك (١) لطلاب السنة الثانية / رياضيات

الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٢ – ٢٠١٣

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و نظامية، عين مع الرسم الإحداثيات الأسطوانية لحركة نقطة ثم استنتج عبارة متجه سرعة هذه النقطة في الإحداثيات الأسطوانية ؟

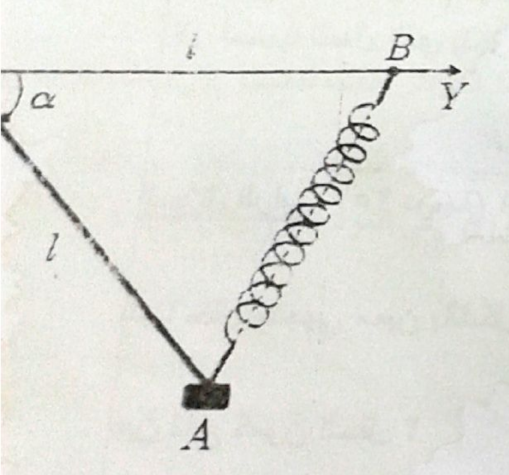
السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

حقل قوى مستوي هو محصلة لحقلين مركزيين أحدهما جاذب مركزه النقطة $(0,1)$ و الآخر نابذ مركزه النقطة $(0,-1)$ و يتناسبان عكساً مع مربع بعد النقطة $M(x,y)$ من المستوي عن مركزي الحقلين بثابتي تناسب k_1 و k_2 على الترتيب

١. استنتج متجه الحقل و دالة كمونه (إن وجدت)

٢. عين خط الحقل و خط التسوية المارين من النقطة $(0,0)$

السؤال الثالث: (٤٠ درجة):



في الشكل المبين جانباً جسيم A كتلته m معلق بطرف خيط OA غير قابل للامتطاط طوله l و طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات، و الجسيم مربوط أيضاً بطرف نابض AB طوله الطبيعي l و طرفه الأخر مثبت في النقطة B الواقعة على المحور OY و التي تبعد عن مبدأ الإحداثيات مسافة l. و المطلوب

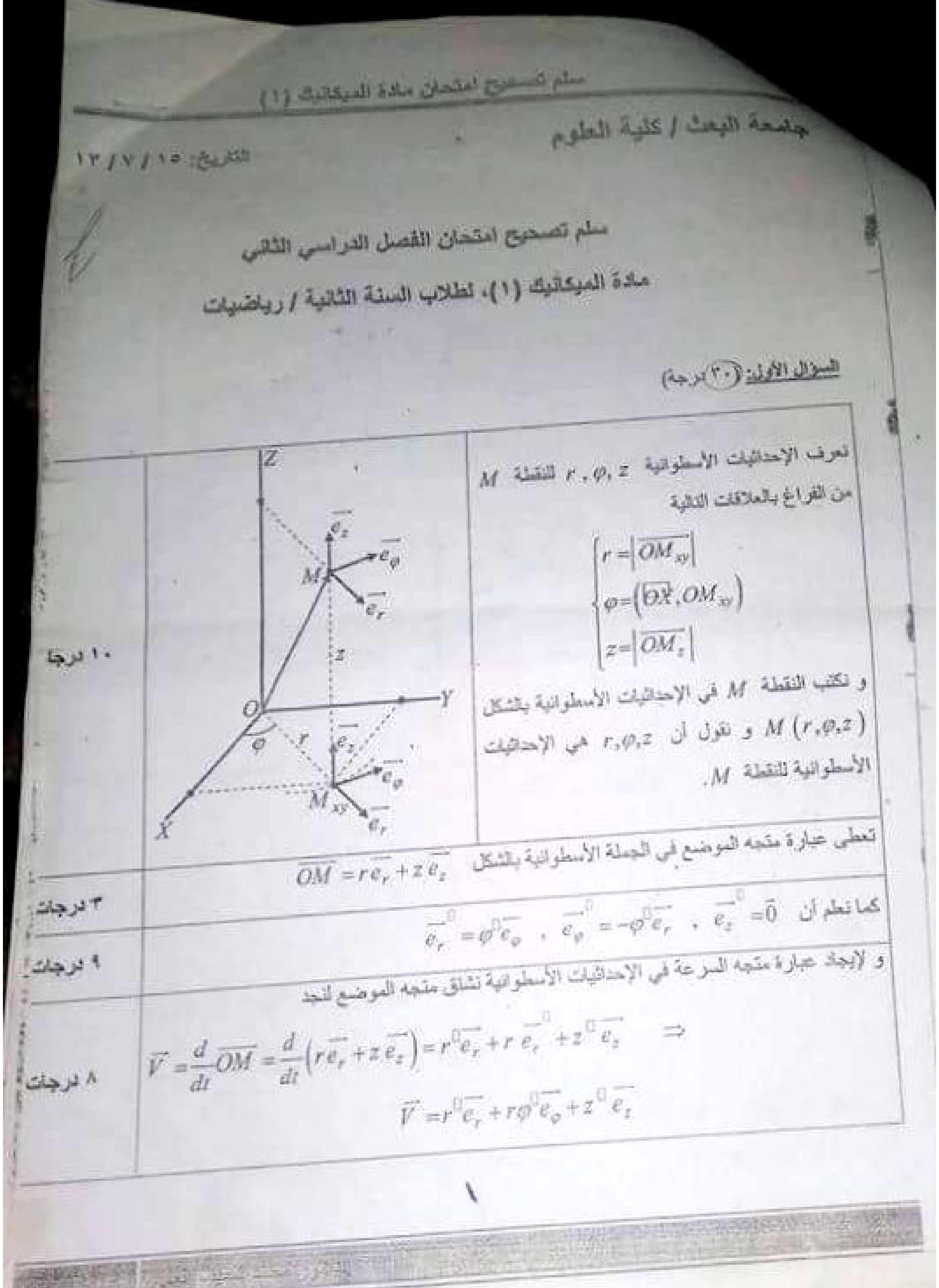
١. عين عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجسيم على اعتباره نقطة مادية.

٢. عين على الشكل، بعد نقله إلى ورقة الإجابة، القوى المؤثرة على الجسيم ثم أوجد شروط توازن الجسيم.

٣. بفرض أن الجسيم متوازن في الموضع ، أوجد معامل مرونة النابض و قوة شد الخيط في هذا الموضع.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و

مدرس المقرر: الدكتور محمد



جامعة البعث / كلية العلوم

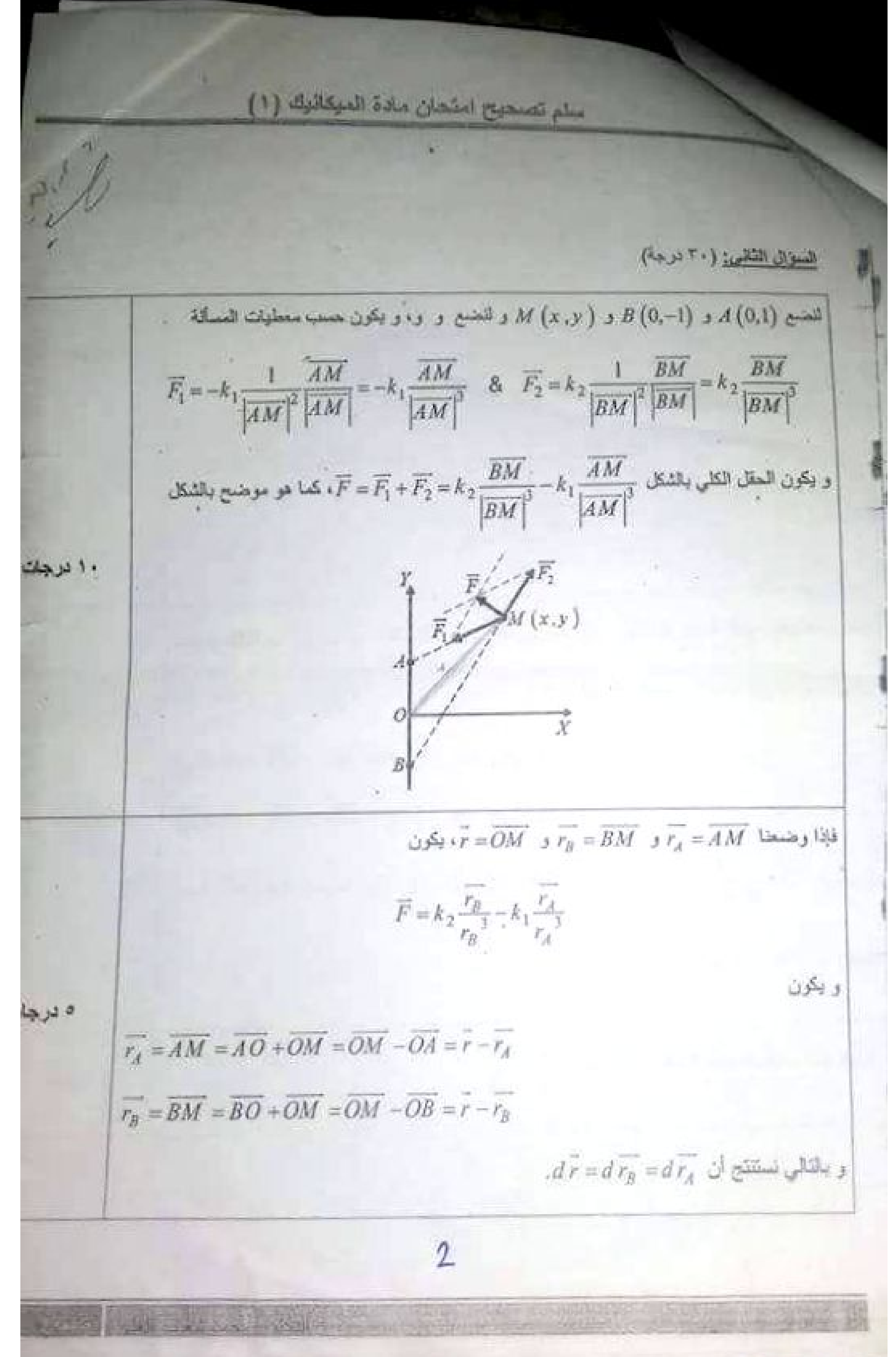
التاريخ: ١٥ / ٧ / ١٣

سلم تصحيح امتحان الفصل الدراسي الثاني

مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

١٠ درجات	نعرف الإحداثيات الأسطوانية r, φ, z للنقطة M من الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases} r = \left\lvert \overrightarrow{OM_{xy}} \right\rvert \\ \varphi = \left(\overrightarrow{OX}, OM_{xy}\right) \\ z = \left\lvert \overrightarrow{OM_z} \right\rvert \end{cases}$ و نكتب النقطة M في الإحداثيات الأسطوانية بالشكل $M\,(r, \varphi, z)$ و نقول أن r, φ, z هي الإحداثيات الأسطوانية للنقطة M.
٣ درجات	تعطى عبارة متجه الموضع في الجملة الأسطوانية بالشكل $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$
٩ درجات	كما نعلم أن $\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$ ، $\dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot\varphi\overrightarrow{e_r}$ ، $\dot{\overrightarrow{e_z}} = \vec{0}$
٨ درجات	و لإيجاد عبارة متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية نشتق متجه الموضع لنجد $\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}\right) = \dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot{\overrightarrow{e_r}} + \dot z\overrightarrow{e_z} \Rightarrow$ $\vec{V} = \dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \dot z\overrightarrow{e_z}$



السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

١٠ درجات

لنضع $A(0,1)$ و $B(0,-1)$ و $M(x,y)$ و لنضع و ، و يكون حسب معطيات المسألة

$$\overrightarrow{F_1}=-k_1\frac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=-k_1\frac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^3} \quad \& \quad \overrightarrow{F_2}=k_2\frac{1}{\left|\overrightarrow{BM}\right|^2}\frac{\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|}=k_2\frac{\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|^3}$$

و يكون الحقل الكلي بالشكل $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=k_2\frac{\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|^3}-k_1\frac{\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^3}$ ، كما هو موضح بالشكل

٥ درجات

فإذا وضعنا $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OM}$ ، يكون

$$\overrightarrow{F}=k_2\frac{\overrightarrow{r_B}}{r_B^3}-k_1\frac{\overrightarrow{r_A}}{r_A^3}$$

و يكون

$$\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_A}$$

$$\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_B}$$

و بالتالي نستنتج أن $d\overrightarrow{r}=d\overrightarrow{r_B}=d\overrightarrow{r_A}$.

و لإيجاد تابع الكمون نضع

$$dV=-\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\left(k_2\frac{\vec{r_B}}{r_B^3}-k_1\frac{\vec{r_A}}{r_A^3}\right)\cdot d\vec{r}=k_1\frac{\vec{r_A}\cdot d\vec{r}}{r_A^3}-k_2\frac{\vec{r_B}\cdot d\vec{r}}{r_B^3}$$

$$=k_1\frac{\vec{r_A}\cdot d\vec{r_A}}{r_A^3}-k_2\frac{\vec{r_B}\cdot d\vec{r_B}}{r_B^3}$$

و بما أن $\vec{r_A}\cdot d\vec{r_A}=r_A\,dr_A$ و $\vec{r_B}\cdot d\vec{r_B}=r_B\,dr_B$، نجد أن

$$dV=k_1\frac{dr_A}{r_A^2}-k_2\frac{dr_B}{r_B^2}=d\left(k_2\frac{1}{r_B}-k_1\frac{1}{r_A}\right)=d\left(\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}\right)\Rightarrow$$

$$V=\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}$$

٥ درجات

تتعين خطوط سوية الحقل بالعلاقة $V=C$، أي أن $\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}=C$. و نعوض إحداثيات النقطة لإيجاد خط السوية المار من النقطة $(0,0)$ لنجد أن

$$\vec{r_A}(0,0)=\overline{AO}=-\overline{OA}=(0,-1)\Rightarrow r_A(0,0)=1$$

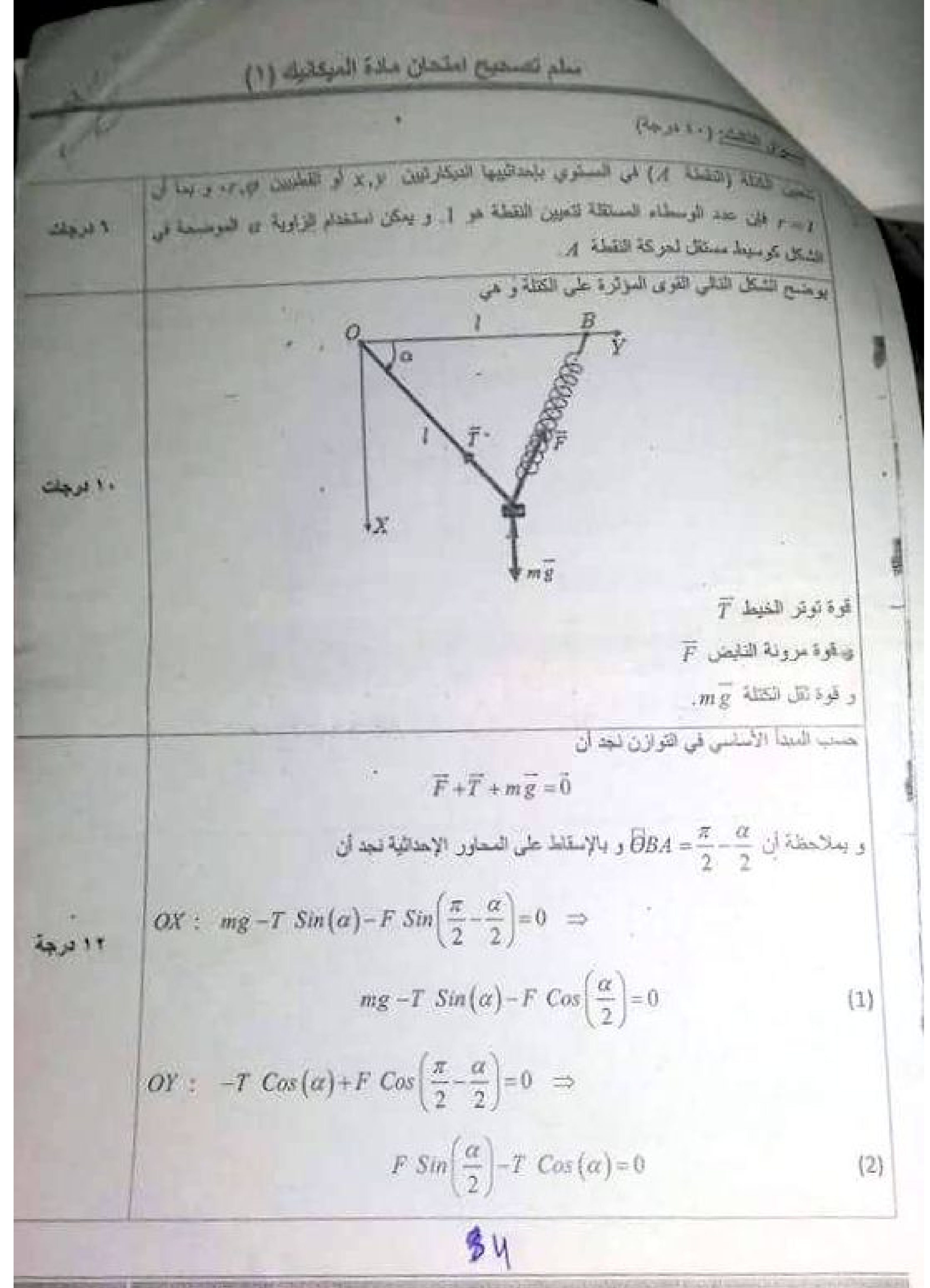
$$\vec{r_B}(0,0)=\overline{BO}=-\overline{OB}=(0,1)\Rightarrow r_B(0,0)=1$$

و يكون $\frac{k_2}{r_B(0,0)}-\frac{k_1}{r_A(0,0)}=C$ و بالتالي فإن $C=k_2-k_1$. نعوض فنجد خط السوية المطلوب و هو $\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}=k_2-k_1$.

٧ درجات

لإيجاد خط الحقل نستخدم المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y}$.

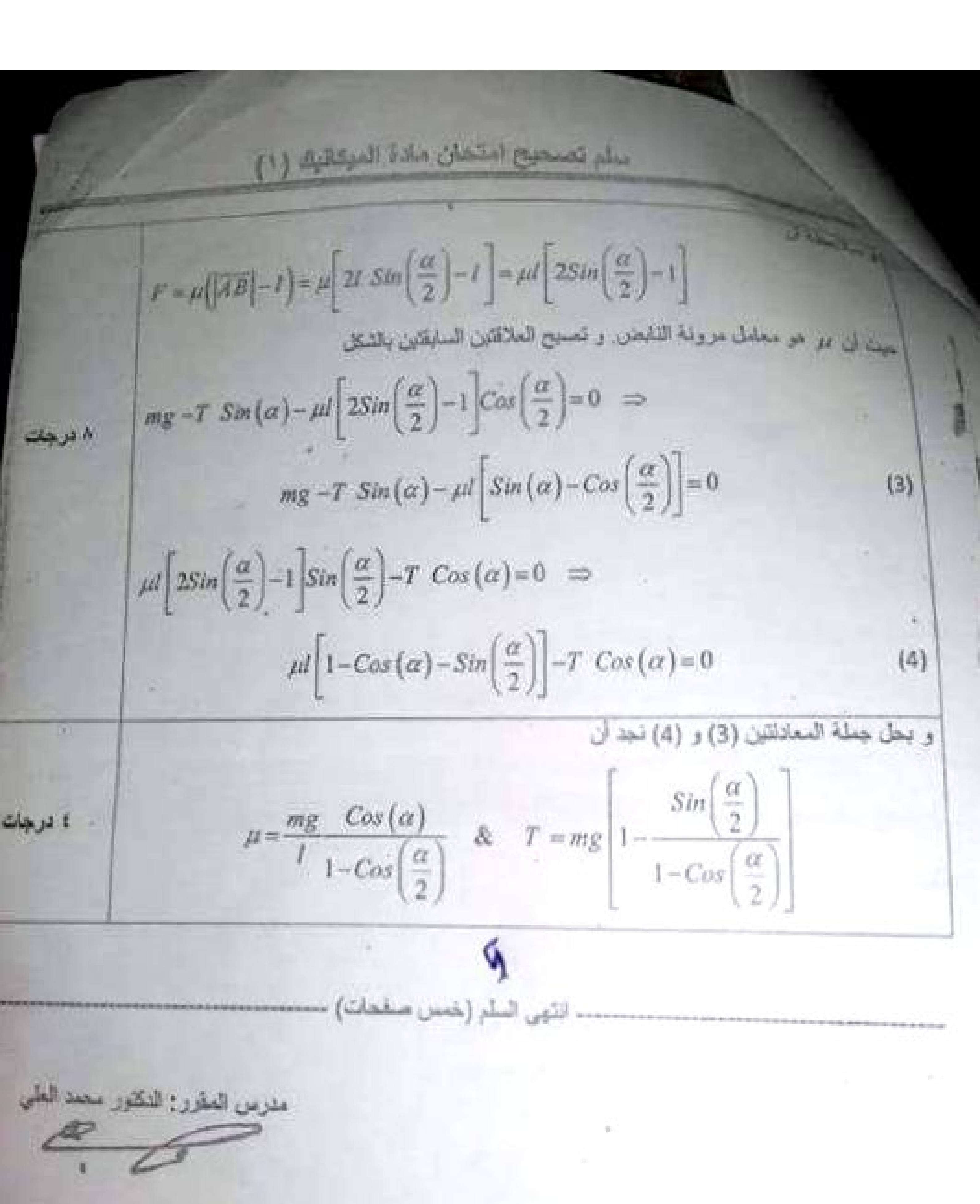
٣ درجات



السؤال الخامس: (٤٠ درجة)

تتعين الكتلة (النقطة A) في المستوي بإحداثيها الديكارتيين x, y أو القطبيين r, φ و بما أن $r = l$ فإن عدد الوسطاء المستقلة لتعيين النقطة هو 1 و يمكن استخدام الزاوية α الموضحة في الشكل كوسيط مستقل لحركة النقطة A	٦ درجات
يوضح الشكل التالي القوى المؤثرة على الكتلة و هي قوة توتر الخيط $\vec{T}$ و قوة مرونة النابض $\vec{F}$ و قوة ثقل الكتلة $m\vec{g}$.	١٠ درجات
حسب المبدأ الأساسي في التوازن نجد أن $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$ و بملاحظة أن $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ و بالإسقاط على المحاور الإحداثية نجد أن $OX: \quad mg - T\,Sin(\alpha) - F\,Sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ $mg - T\,Sin(\alpha) - F\,Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad (1)$ $OY: \quad -T\,Cos(\alpha) + F\,Cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ $F\,Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - T\,Cos(\alpha) = 0 \qquad (2)$	١٢ درجة

34



سلم تصحيح امتحان مادة الميكانيك (١)

$F=\mu\left(\left\|\overline{AB}\right\|-l\right)=\mu\left[2l\,Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-l\right]=\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]$ حيث أن μ هو معامل مرونة النابض. و تصبح العلاقتين السابقتين بالشكل $mg-T\,Sin(\alpha)-\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow$ $mg-T\,Sin(\alpha)-\mu l\left[Sin(\alpha)-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]=0$ (3) $\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-T\,Cos(\alpha)=0 \Rightarrow$ $\mu l\left[1-Cos(\alpha)-Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]-T\,Cos(\alpha)=0$ (4)	٨ درجات
و بحل جملة المعادلتين (3) و (4) نجد أن $\mu=\frac{mg}{l}\frac{Cos(\alpha)}{1-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ & $T=mg\left[1-\frac{Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$	٤ درجات

٥

---------- انتهى السلم (خمس صفحات) ----------

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

امتحان مادة الميكانيك (١) لطلاب السنة الثانية / رياضيات

الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٣ – ٢٠١٤

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

ارسم جملة إحداثية ديكارتية و عين على الرسم الوسطاء الأسطوانية و الكروية لتعيين نقطة مادية P في الفضاء و متجهات الواحدة للجملتين الأسطوانية و الكروية، ثم اكتب عبارتي متجه موضع النقطة P في هاتين الجملتين ؟

السؤال الثاني: (٢٥ درجة) المحاضرة 12

تتحرك نقطة مادية P في المستوي XOY بحيث تعطى إحداثيات هذه النقطة في كل لحظة زمنية t بالعلاقات

$$x = \theta Cos(\theta)\ ,\ y = \theta Sin(\theta)\quad ;\quad kt = \theta^3$$

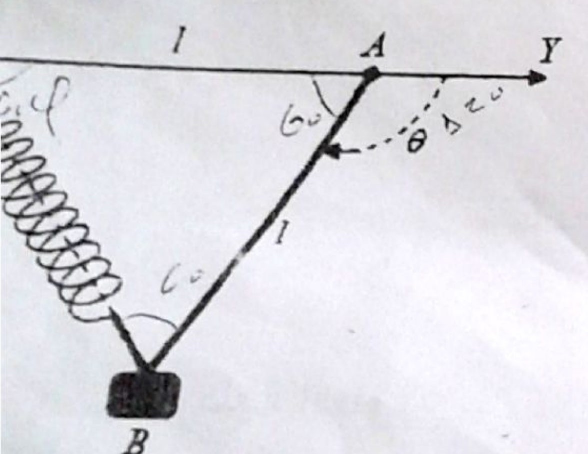
أ. اثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح

ii. عين سرعة و تسارع حركة النقطة

السؤال الثالث: (٢٥ درجة) المحاضرة الثالثة

حقل مركزي نابذ مركزه النقطة $A(0,1,0)$ و يتناسب عكساً مع مربع البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ، عين العبارة الرياضية لمتجه الحقل ثم أثبت أنه حقل كموني و أوجد تابع كمونه و أحسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل نقطة تحت تأثير هذا الحقل من الموضع $B(1,2,1)$ إلى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)



في الشكل المبين جانباً جسيم B كتلته m معلق بطرف خيط AB غير قابل للامتطاط طوله l طرفه الآخر مثبت في النقطة $A(0,l)$، و الجسيم مربوط أيضاً بطرف نابض OB طوله الطبيعي l و طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات كما هو مبين في الشكل المجاور

١. عين عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجسيم على اعتباره نقطة مادية.

٢. عين على الشكل، بعد نقله إلى ورقة الإجابة، القوى المؤثرة على الجسيم ثم أوجد شروط توازن الجسيم.

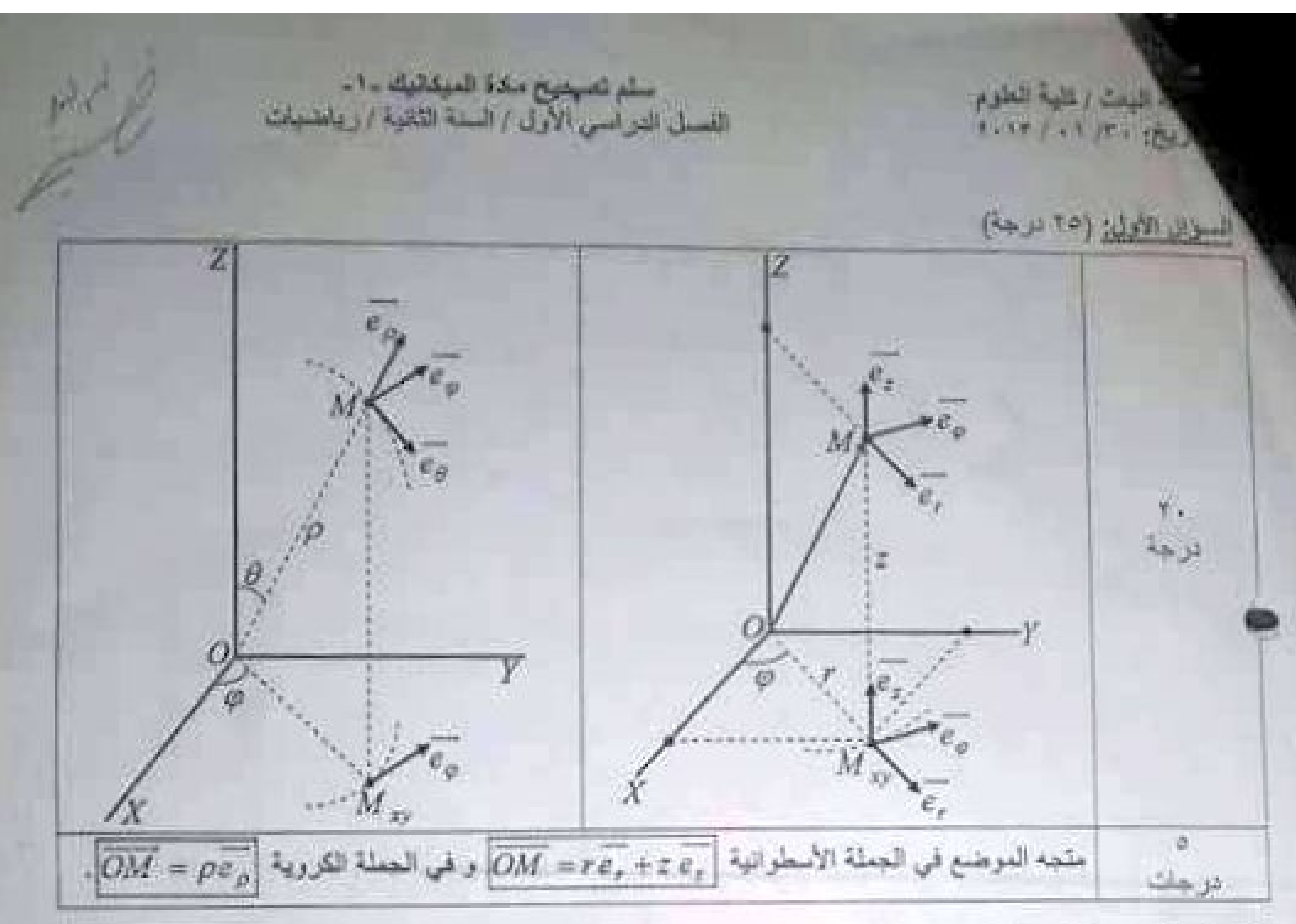
مع أطيب التمنيات بالتوفيق و ال

مدرس المقرر: الدكتور محمد

البعث / كلية العلوم
يخ: ٣٠ / ٠١ / ٢٠١٣

سلم تصحيح مادة الميكانيك -١-
الفصل الدراسي الأول / السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (٢٥ درجة)



٢٠ درجة	(الشكلان)
٥ درجات	متجه الموضع في الجملة الأسطوانية $\overline{OM} = r\overline{e_r} + z\,\overline{e_z}$ و في الجملة الكروية $\overline{OM} = \rho\overline{e_\rho}$.

السؤال الثاني: (٢٥ درجة)

١٠ درجات	نلاحظ أن $dt = \frac{1}{4}(2+2Cos(2\varphi))d\varphi = \frac{(1+Cos(2\varphi))}{2}d\varphi = Cos^2(\varphi)d\varphi \Rightarrow$ $\varphi^{\bullet} = \frac{1}{Cos^2(\varphi)} \Rightarrow r^2\varphi^{\bullet} = (\alpha\ Cos(\varphi))^2\frac{1}{Cos^2(\varphi)} = \alpha^2 = C$ و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.
٥ درجات	لإيجاد سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينيه الأول و الثاني، حيث نجد أن $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)} \Rightarrow u'_\varphi = \frac{Sin(\varphi)}{\alpha\ Cos^2(\varphi)}\ \ \&\ \ u''_\varphi = \frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)} + \frac{2Sin^2(\varphi)}{\alpha\ Cos^3(\varphi)}$

باستخدام دستوري بينيه نجد أن

$$\vec{V}=C\left(-\frac{du}{d\varphi}\vec{e_r}+u\vec{e_\varphi}\right)=a^2\left[-\frac{Sin(\varphi)}{a\,Cos^2(\varphi)}\vec{e_r}+\frac{1}{a\,Cos(\varphi)}\vec{e_\varphi}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{V}=\frac{a}{Cos(\varphi)}\left[-Tan(\varphi)\vec{e_r}+\vec{e_\varphi}\right]$$

$$\vec{\Gamma}=-C^2u^2\left(u''_\varphi+u\right)\vec{e_r}=-\frac{2a}{Cos^5(\varphi)}\vec{e_r}$$

١٠ درجات

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

باستخدام معادلات المنحني نجد أن

$$dx=3dt\;,\;dy=4dt\;,\;dz=dt$$

و تصبح عبارة العمل المطلوب بالشكل

$$\begin{aligned}W&=\int_{t=0}^{t=2}\vec{F}\cdot d\vec{r}\\&=\int_{t=0}^{t=2}\left(\frac{25}{6}y\,\vec{i}+(z-x)\vec{j}+\left(2z^2-x\right)\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}\right)\\&=\int_{t=0}^{t=2}\left(\frac{25}{6}y\,dx+(z-x)dy+\left(2z^2-x\right)dz\right)\\&=\int_{t=0}^{t=2}\left(25t^2\,dt-8t(1+t)dt+\left(2t^2-11t+8\right)dt\right)\\&=\int_{t=0}^{t=2}\left(19t^2-19t+8\right)dt=\left[\frac{19}{3}t^3-\frac{19}{2}t^2+8t\right]_0^2=\frac{86}{3}\end{aligned}$$

٢٥ درجة

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

في حال وجود تابع القوى (أو تابع الكمون) للحقل فإن

$$dU=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\lambda\,\vec{r}+\vec{a}\right)\cdot d\vec{r}=d\left(\frac{\lambda}{2}\vec{r}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=d\left(\frac{\lambda}{2}r^2+\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{U=\frac{\lambda}{2}r^2+\vec{a}\cdot\vec{r}+C}$$

١٠ درجات

حيث أن C هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون الحقل، وبالتالي فإن القوة المعطاة هي قوة كمونية.	
بما أن $\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ و بفرض أن $\vec{a} = a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j} + a_z\ \vec{k}$ فإن $\vec{F} = (\lambda x + a_x)\vec{i} + (\lambda y + a_y)\vec{j} + (\lambda z + a_z)\vec{k}$	٥ درجات
وبالتالي فإن خطوط القوى تعطى بالمعادلات التفاضلية $\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \Rightarrow \frac{dx}{\lambda x + a_x} = \frac{dy}{\lambda y + a_y} = \frac{dz}{\lambda z + a_z} \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{dx}{\lambda x + a_x} = \frac{dy}{\lambda y + a_y} \\ \frac{dy}{\lambda y + a_y} = \frac{dz}{\lambda z + a_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} - \frac{\lambda dx}{\lambda x + a_x} = 0 \\ \frac{\lambda dz}{\lambda z + a_z} - \frac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} Ln\left(\frac{\lambda y + a_y}{\lambda x + a_x}\right) = Ln(A) \\ Ln\left(\frac{\lambda z + a_z}{\lambda y + a_y}\right) = Ln(B) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda y + a_y = A(\lambda x + a_x) \\ \lambda z + a_z = B(\lambda y + a_y) \end{matrix}}$ و هي معادلات خطوط قوى الحقل المعطى حيث أن A و B هما ثابتان اختياريان.	١٠ درجات

الدكتور محمد العلي

3

الإسم:

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2013 – 2014

مادة الميكانيك (1), لطلاب السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (25 درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$, حدد مع الرسم الوسطاء الكروية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب عبارة متجه موضع النقطة في هذه الجملة و استنتج عبارة سرعة النقطة فيها.

السؤال الثاني: (25 درجة) المحاضرة الثانية

تتحرك نقطة مادية P وفق القوانين الزمنية التالية

$$x = h(1+Cos(t)) \quad , \quad y = h(1-Cos(t)) \quad , \quad z = \sqrt{2}\ h\ Sin(t)$$

أثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح ثم أحسب السرعة السطحية لهذه الحركة.

السؤال الثالث: (25 درجة) ~~[illegible]~~

حقل مركزي جاذب مركزه النقطة $A(0,0,-1)$ و يتناسب عكساً مع مكعب البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ, و المطلوب

1. عين هذا الحقل, ثم أثبت أنه حقلٌ كموني و أوجد تابع كمونه
2. أحسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل النقطة من الموضع $B(1,2,1)$ إلى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (25 درجة) المحاضرة /٦/

مجموعة مادية تتحرك في المستوي XOY مؤلفة من نقطة مادية P_1 كتلتها m_1 مربوطة بخيط مهمل الكتلة و غير قابل للامتطاط طوله l_1 طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات, و نقطة مادية P_2 كتلتها m_2 مثبتة بطرف قضيب مهمل الكتلة طوله l_2 طرفه الآخر مثبت في النقطة P_1. حدد عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجملة, ثم عين شروط توازن هذه الجملة المادية ؟

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

الدكتور محمد شعيب العلي

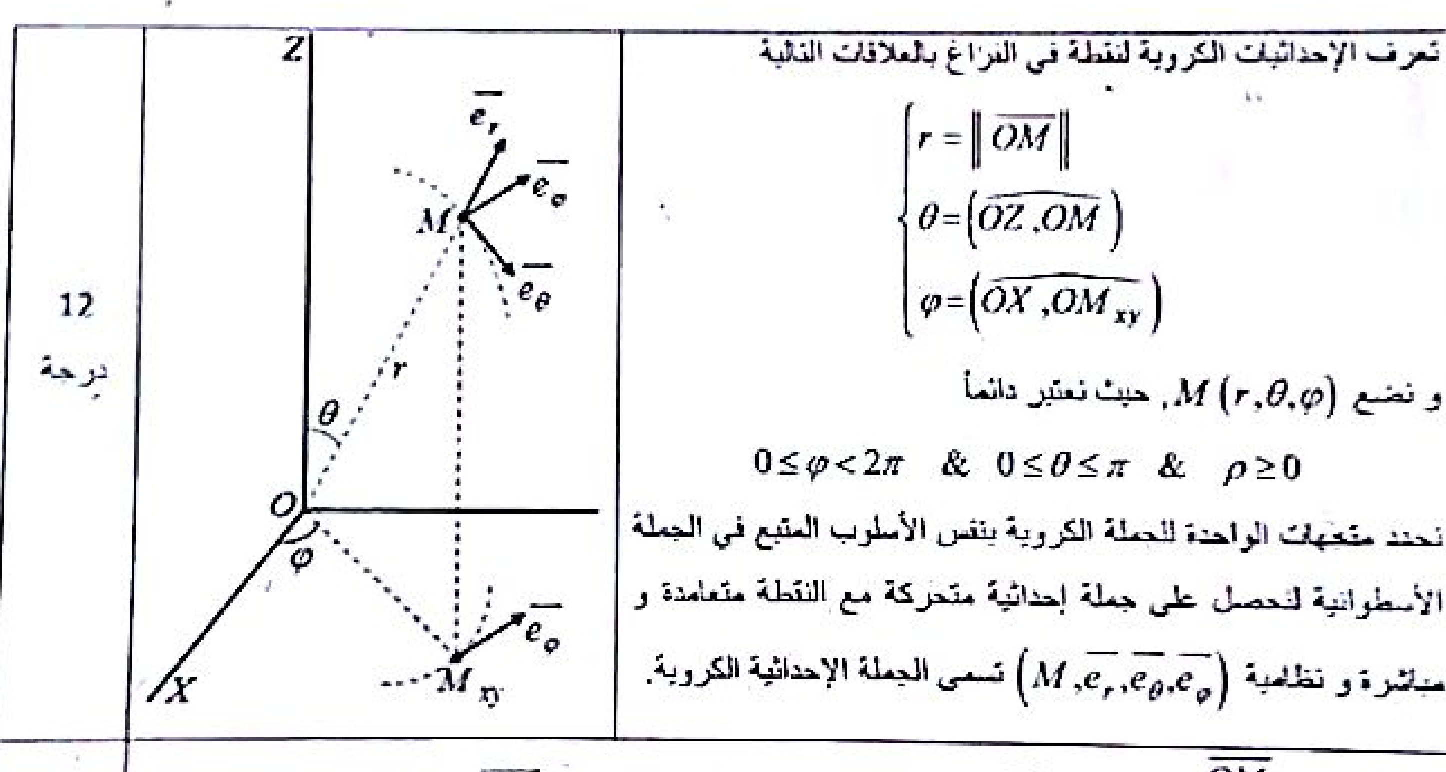


جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (1)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2013 – 2014

السؤال الأول: (25 درجة)

تعرف الإحداثيات الكروية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases} r = \lVert \overline{OM} \rVert \\ \theta = (\overline{OZ}, \overline{OM}) \\ \varphi = (\overline{OX}, \overline{OM_{xy}}) \end{cases}$ و نضع $M(r,\theta,\varphi)$، حيث نعتبر دائماً $0 \le \varphi < 2\pi \quad \& \quad 0 \le \theta \le \pi \quad \& \quad \rho \ge 0$ نحدد متجهات الواحدة للجملة الكروية بنفس الأسلوب المتبع في الجملة الأسطوانية لنحصل على جملة إحداثية متحركة مع النقطة متعامدة و مباشرة و نظامية $(M, \overline{e_r}, \overline{e_\theta}, \overline{e_\varphi})$ تسمى الجملة الإحداثية الكروية.		12 درجة
و نلاحظ أن $\overline{e_r} = \frac{\overline{OM}}{\lvert \overline{OM} \rvert}$ و أن $\overline{e_\theta}$ هو متجه عمودي على متجه الموضع $\overline{OM}$ ويقع في المستوي المتحرك مع النقطة ZOM و أن $\overline{e_\varphi}$ هو ذاته متجه الواحدة المعرف في الجملة الاسطوانية، كما هو موضح في الشكل (4). كما نلاحظ أن عبارة متجه الموضع في الإحداثيات الكروية تعطى بالعلاقة $\boxed{\overline{OM} = r\overline{e_r}}$.		درجتان
و بما أن $\begin{cases} \dot{\overline{e_\rho}} = \dot{\theta}\,\overline{e_\theta} + \dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_\varphi} \\ \dot{\overline{e_\theta}} = \dot{\theta}\,\overline{e_\rho} + \dot{\varphi}\,Cos(\theta)\overline{e_\varphi} \\ \dot{\overline{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_\rho} - \dot{\varphi}\,Cos(\theta)\overline{e_\theta} \end{cases}$		6 درجات

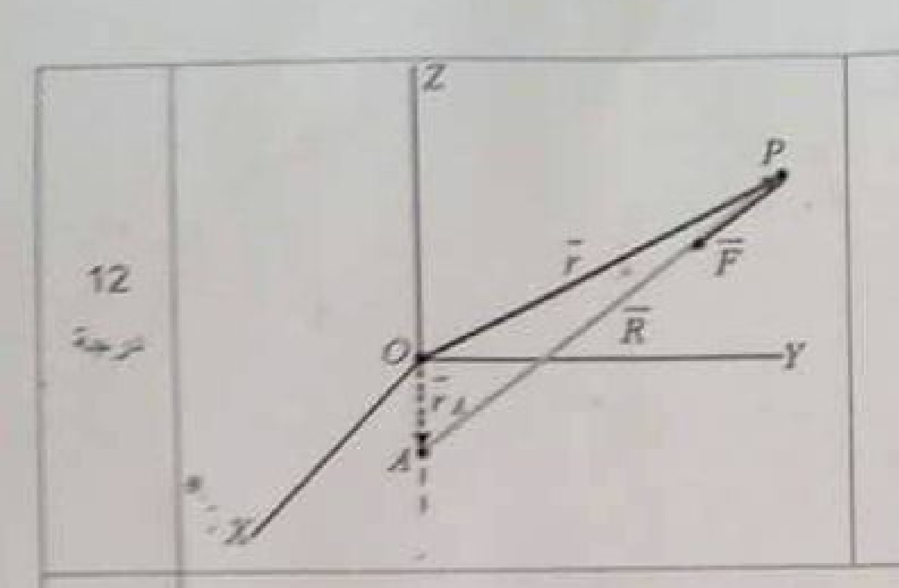
5 درجات	لإيجاد عبارة متجه السرعة في الإحداثيات الكروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $$\vec{V}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\frac{d}{dt}\left(\rho\vec{e_\rho}\right)=\rho^{\cdot}\vec{e_\rho}+\rho\vec{e_\rho}^{\cdot}=\rho^{\cdot}\vec{e_\rho}+\rho\theta^{\cdot}\vec{e_\theta}+\rho\varphi^{\cdot}Sin(\theta)\vec{e_\varphi}$$

السؤال الثاني: (25 درجة)

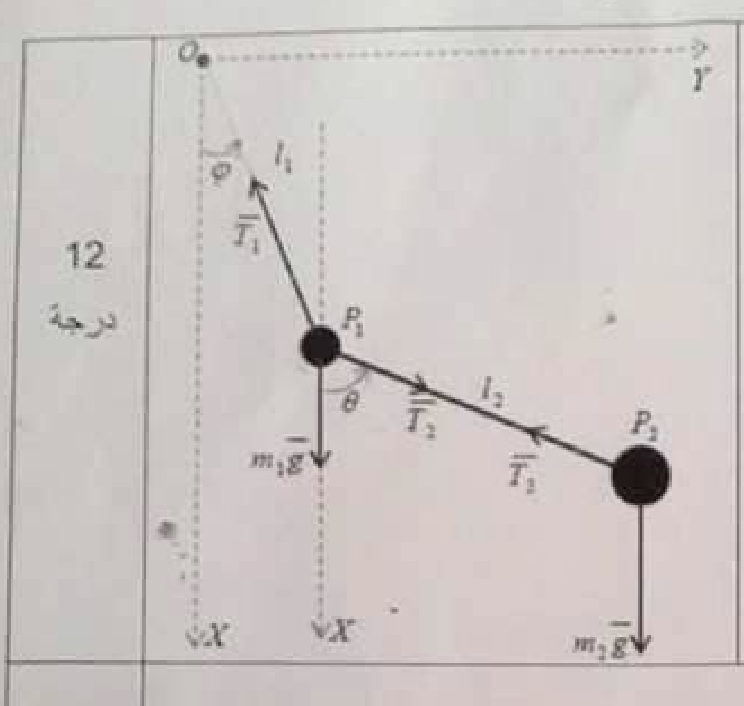
درجتان	بملاحظة أن $x+y=2h$ ، نستنتج أن حركة النقطة P هي حركة مستوية تتم في المستوي $x+y=2h$.
5 درجات	$\vec{V}=-h\,Sin(t)\,\vec{i}+h\,Sin(t)\,\vec{j}+\sqrt{2}\,h\,Cos(t)\,\vec{k}\;\Rightarrow$ $$\vec{\Gamma}=-h\,Cost(t)\,\vec{i}+h\,Cos(t)\,\vec{j}-\sqrt{2}\,h\,Sin(t)\,\vec{k}$$
5 درجات	معادلات المستقيم المار من النقطة P و الموازي لتسارع النقطة $\vec{\Gamma}$ تعطى في أي لحظة زمنية t بالعلاقات $$\frac{x-h-h\,Cos(t)}{-h\,Cost(t)}=\frac{y-h+h\,Cos(t)}{h\,Cost(t)}=\frac{z-\sqrt{2}\,h\,Sin(t)}{-\sqrt{2}\,h\,Sin(t)}$$
3 درجات	بملاحظة أن النقطة $A(h,h,0)$ تحقق معادلات المستقيم السابق في أي لحظة زمنية t، و بالتالي فإن منحى تسارع النقطة P يمر دائماً من النقطة الثابتة A في الفراغ. أي أن حركة النقطة P هي حركة مركزية في المستوي $x+y=2h$ مركزها النقطة الثابتة A. و بالتالي حسب مبرهنة سابقة تكون حركة النقطة خاضعة لقانون السطوح.
6 درجات	$\vec{\sigma}=\overrightarrow{AP}\times\vec{V}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\times\vec{V}=\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\times\vec{V}$ $$=\left(h\,Cos(t)\,\vec{i}-h\,Cos(t)\,\vec{j}+\sqrt{2}\,h\,Sin(t)\,\vec{k}\right)\times$$ $$\times\left(-h\,Sin(t)\,\vec{i}+h\,Sin(t)\,\vec{j}+\sqrt{2}\,h\,Cos(t)\,\vec{k}\right)\Rightarrow$$
4 درجات	$$\vec{\sigma}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ h\,Cos(t) & -h\,Cos(t) & \sqrt{2}\,h\,Sin(t)\\ -h\,Sin(t) & h\,Sin(t) & \sqrt{2}\,h\,Cos(t)\end{vmatrix}=h^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ Cos(t) & -Cos(t) & \sqrt{2}\,Sin(t)\\ -Sin(t) & Sin(t) & \sqrt{2}\,Cos(t)\end{vmatrix}\Rightarrow$$ $$\vec{\sigma}=h^2\left(-\sqrt{2}\,\vec{i}-\sqrt{2}\,\vec{j}+0\,\vec{k}\right)$$



<u>السؤال الثالث:</u> (25 درجة)

<table>
<tr><td>12 درجة</td><td>
</td><td>بملاحظة الشكل المجاور, لنضع
$\vec{r}=\overline{OP}\ ,\ \vec{R}=\overline{AP}\ ,\ \vec{r}_A=\overline{OA}$
عندئذ نجد حسب الفرض أن
$\vec{F}=-\lambda\frac{1}{R^3}\frac{\vec{R}}{R}=-\lambda\frac{\vec{R}}{R^4}$
حيث أن $R=\lVert\vec{R}\rVert$.</td></tr>
<tr><td>3 درجات</td><td colspan="2">كما نلاحظ أن
$\vec{r}=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\vec{r}_A+\vec{R}\ \Rightarrow\ d\vec{r}=d\vec{r}_A+d\vec{R}=\vec{0}+d\vec{R}=d\vec{R}$
و ذلك لأن $\vec{r}_A=\overline{Const}$.</td></tr>
<tr><td>5 درجات</td><td colspan="2">و بما أن $\vec{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\vec{R}\cdot d\vec{R}=R\ dR$, و يكون
$dV=\lambda\frac{1}{R^4}R\ dR=\lambda\frac{dR}{R^3}=d\left(-\frac{\lambda}{2R^2}\right)\ \Rightarrow\ V=-\frac{\lambda}{2R^2}+D$
و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة.</td></tr>
<tr><td>5 درجات</td><td colspan="2">و لحساب العمل, نعلم أن
$$W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(-\frac{\lambda}{2R_B^2}+D\right)-\left(-\frac{\lambda}{2R_C^2}+D\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_C^2}-\frac{1}{R_B^2}\right)$$
$$=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lVert\overline{AC}\rVert^2}-\frac{1}{\lVert\overline{AB}\rVert^2}\right)$$
$$=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(3-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}-\frac{1}{(1-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}\right)$$
$$=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{9+4+4}-\frac{1}{1+4+4}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{4}{153}\lambda$$</td></tr>
</table>

السؤال الرابع: (25 درجة)



بملاحظة الشكل المجاور، نلاحظ أن هذه الجملة مؤلفة من نقطتين ماديتين P_1 و P_2. و بما أن حركة النقطة P_1 هي حركة دائرية حول O، فيكفي لتعيينها اعتبار الزاوية φ المحصورة بين المحور OX و المتجه $\overline{OP_1}$ كوسيط لحركة هذه النقطة. و بتثبيت حركة النقطة P_1، نلاحظ أن حركة النقطة P_2 هي حركة دائرية حول P_1، فيكفي لتعيينها اعتبار الزاوية θ المحصورة بين المحور P_1X الموازي للمحور OX و المار من النقطة P_1 و المتجه $\overline{OP_1}$ كوسيط لحركة هذه النقطة P_1. و بالتالي فإن الجملة المادية المعطاة تملك درجتين من الحرية و يمكن اعتماد الوسيطين φ و θ كوسطاء مستقلة لحركة الجملة.

12 درجة



بتطبيق المبدأ العام في التوازن في النقطة P_1 نجد

$$\overline{T_1}+m_1\overline{g}+\overline{T_2}=\vec{0} \quad \text{.............................. (i)}$$

و بإسقاط العلاقة (i) على المحورين OX و OY نجد أن

$$-T_1\,Cos(\varphi)+m_1g+T_2\,Cos(\theta)=0 \quad \text{.......................... (1)}$$

$$-T_1\,Sin(\varphi)+0+T_2\,Sin(\theta)=0 \quad \text{.............................. (2)}$$

6 درجات

بتطبيق المبدأ العام في التوازن في النقطة P_2 نجد

$$\overline{T_3}+m_2\overline{g}=\vec{0} \quad \text{.................................... (ii)}$$

و بملاحظة أن $\overline{T_3}=-\overline{T_2}$ (لكون قوى التوتر في أي نقطة من جسم غير قابل للامتطاط متساوية بالشدة)، تصبح العلاقة (ii) بالشكل

$$-\overline{T_2}+m_2\overline{g}=\vec{0} \quad \text{.................................... (iii)}$$

و بإسقاط العلاقة (iii) على المحورين OX و OY نجد أن

$$-T_2\,Cos(\theta)+m_2g=0 \quad \text{.................................. (3)}$$

$$T_2\,Sin(\theta)+0=0 \quad \text{.................................... (4)}$$

7 درجات

......................انتهى السلم (اربع صفحات)........................

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي